基于延迟函数次梯度启发式道路交通补偿策略

刘艳锐，姚　笛，李金培

(上海交通大学 安泰经济与管理学院，上海 200030)

摘　要：拥挤收费被认为是解决交通拥挤的有效方法，解决道路交通拥堵的主要想法是，对于有些容易造成拥堵的道路进行收费，而对于其他未充分利用的道路进行适当补偿，对此提出一种基于延迟函数的次梯度启发式道路交通补偿策略。首先，给出道路集的收费/补贴的非线性规划模型，主要是基于 Beckmann 最小化目标函数实现，然后利用库恩-希尔斯条件和拉格朗日乘子建立模型的条件约束；其次，基于启发式算法建立道路交通的定价补偿策略，利用边际成本建立延迟函数分析模型，然后基于次梯度法进行模型的优化；最后，通过在真实道路网络上的仿真实验，显示所提算法在旅行时间、交通流量、收敛性等指标上均具有较好的性能，验证了算法的有效性。

关键词：延迟函数；次梯度；启发式；道路交通；补偿策略

中图分类号：TP391　　doi: 10.3969/j.issn.1001-3695.2017.07.0704

Subgradient heuristic method for road traffic compensation based on delay function

Liu Yanrui, Yao Di, Li Jinpei

(*Antai College of Economics & Management*, *Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200030)

Abstract: This paper considers the congestion pricing to be the effective way to solve the traffic congestion, the main idea of road traffic congestion is to charge for some easy to cause road congestion, and appropriate compensation for other underutilized roads, and here presents a subgradient heuristic traffic delay compensation strategy based on function. Firstly, here use a nonlinear programming model in the road toll/subsidies, beckmann is the main realization based on minimizing the objective function, and uses the Kuhn hills-Lagrange multiplier model to construct the constraint condition; Secondly, the algorithm uses the pricing compensation strategy to establish the road traffic model based on heuristic algorithm, and also uses the marginal cost model to establish the delay function analysis model. Finally, the simulation experiments on real road networks show that the proposed algorithm has better performance in terms of travel time, traffic flow, convergence and so on, and the effectiveness of the proposed algorithm is verified.

Key Words: delay function; subgradient; heuristic; road traffic; compensation strategy

0　引言

交通堵塞会对经济社会造成巨大损失，2016 年美国市区的拥堵费为 1010 亿美元[1~2]。最近的一项研究表明，澳大利亚首都城市 2015 年度的拥塞成本估计约 17.5 亿美元的，而年度的拥塞成本是 12.8 亿，该值得到了大幅增加。因此，研究交通拥塞解决问题，具有非常重要的研究价值[3]。

利用供求关系分析，当需求大于供给时就会发生阻塞。因此，可以通过增加供给或降低需求来解决拥塞问题[4]。在供给侧，可建造更多的道路实现交通的分流。在需求方面，可利用经济文献中提出的拥挤定价策略进行设计，实现供给和需求过程的平衡。例如，文献[5]提出了一个随时间变化的定价方案，包括在同一路线上的通行费和补贴。文献[6]讨论了一种再分配方案，可实现从理想路线收集的流量转移到不太理想的路线上。文献[7]研究了帕累托改进的交通定价的多用户存在问题。在限制帕累托改善条件的情况下，如果存在显著的间隙，交通定价问题总是存在一个解决方案。文献[8]研究了利用奖励措施，引导通行者选择拥堵程度较弱的路段。文献[9]研究基于纯粹补贴（没有任何收费）机制的交通引导策略，其目的是减少城市网络中的拥塞。

上述方法思路都是针对一些高度拥挤的道路，旨在重新分配流量负载均匀分布在整个网络包括不拥挤的道路。此类方法类似于一种专家策略，并未定义问题的梳理模型进行分析，优化效果不理想。为此，本文在给出交通定价补偿数学规划模型基础上，实现道路交通补偿的优化。

作者简介：刘艳锐（1984-），男，湖北襄阳人.博士研究生，主要研究方向为城市交通管理（liuyanruils@qq.com）；姚迪（1987-），女，辽宁鞍山人，博士研究生，主要研究方向为城市交通管理；李金培，女，河南许昌人，博士研究生，主要研究方向为城市交通管理.

1　数学模型

1.1　问题描述

给定一组具有上限容量的道路，需进行收费或者补贴，即交通定价方案。该问题本质上是一个容量限制交通分配问题（CTAP）。考虑 $G(N,A)$ 是一个交通网络图，其具有 N 个节点，A 是连接 $R\subset N\times N$ 上源节点和目的节点的道路。道路集的收费/补贴可表示为 $\bar{A}\subset A$。CTAP 可归结为如下非线性规划问题：

$$\min z(x)=\sum_{a\in A}\int_0^{x_a}t_a(x)dx \tag{1}$$

s.t.

$$\begin{cases}\sum_p f_{p,r}=q_r\\ r\in R\rightarrow \text{Lagrange multiplier}(w_r)\end{cases} \tag{2}$$

$$f_{p,r}\ge 0\quad p\in P_r, r\in R \tag{3}$$

$$x_a=\sum_r\sum_p f_{p,r}\delta_{a,p}^r\quad a\in A, p\in P_r, r\in R \tag{4}$$

$$\begin{cases}x_a\le C_a\\ a\in\bar{A}\rightarrow \text{Lagrange multiplier}(\beta_a)\end{cases} \tag{5}$$

其中：z 是 Beckmann 最小化目标函数；x_a 是道路 a 上的交通流量；q_r 是与 OD 对 $r\in R$ 相对应的运输需求；$f_{p,r}$ 是与 OD 对相连接路径 p 上的交通流量；P_r 是与 OD 对相连接的所有路径集合；$\delta_{a,p}^r$ 是道路路径的隶属度，如果 $a\in p$ 则 $\delta_{a,p}^r=1$，否则 $\delta_{a,p}^r=0$；C_a 是路径 a 的交通容量。

1.2　库恩-希尔斯条件和拉格朗日乘子

实践证明，CTAP 在线性约束条件下是严格凸问题，呈现独特的道路流量全局最优解。考虑 w_r 和 β_a 分别作为运输需求和容量限制的拉格朗日乘子。则可构建如下库恩-希尔斯条件（KKT）条件：

$$f_{p,r}\left(u_{p,r}+\sum_{a\in A}\delta_{a,p}^r\beta_a-w_r\right)=0 \tag{6}$$

$$\beta_a(C_a-x_a)=0 \tag{7}$$

$$u_{p,r}+\sum_{a\in A}\delta_{a,p}^r\beta_a-w_r\ge 0 \tag{8}$$

$$C_a-x_a\ge 0, f_{p,r}\ge 0,\beta_a\ge 0 \tag{9}$$

$$\sum_p f_{p,r}=q_r \tag{10}$$

其中：$u_{p,r}=\sum_{a\in A}\delta_{a,p}^r t_a$ 是在连接OD对 p 路径上的总的运输时间，有关参数取值设定如下：$p\in P_r$，$r\in R$，$a\in\bar{A}$。定义 $\hat{u}_{p,r}$ 为相应路径的运输时间为

$$\hat{u}_{p,r}=\sum_{a\in A}\delta_{a,p}^r(t_a+\beta_a) \tag{11}$$

将式（11）代入式（6）（8）可得

$$f_{p,r}(\hat{u}_{p,r}-w_r)=0 \tag{12}$$

$$\hat{u}_{p,r}-w_r\ge 0 \tag{13}$$

利用式（12）～（13）可以证明，w_r 是与 OD 对相连接的最短路径传输时间；因此，如果一个路径需要一定的交通量 $f_{p,r}>0$，这肯定是最短的路径。根据式（7）～（9），如果容量约束是饱和的，即 $x_a=C_a$，那么相应的拉格朗日乘子为非零，即 $\beta_a>0$；否则 $\beta_a=0$。式(11)中有两项有助于增加传输时间：正常或巡航传输时间 t_a 和 beta 项 β_a。β_a 可以解释为收费/补贴价值或防止道路的运输延迟出现过饱。

在文献中，beta 项也可解释为在过饱和的道路排队堆积造成等待时间。如图所示，代表通行费或补贴价值的 beta 项是正数，而补贴应该是负值。接下来，将提出一种策略防止出现任何的负面循环。

1.3　行程时间加强

首先假设只有收费和没有补贴。在制定收费标准后，会把模型扩大到补贴。考虑延迟函数 $t_a=t_a^0(+f(x_a))$，其中 t_a^0 是行人在道路 a 上的自由行走时间，$f(x_a)\ge 0$ 是非递减的，函数 x_a 的凸函数满足 $f(x_a)=0|x_a=0$。可以直观地认为，只要是空的或不拥挤的道路，行程时间是自由流的时间，即 $x_a\approx 0\Rightarrow t_a\approx t_a^0$；随着交通量的构建，行程时间 t_a 也相应增加，肯定比自由流时间高。根据式（11），饱和路段的行程时间 $\hat{t}_a$ 可表示为

$$\hat{t}_a=(t_a^0+b_a)(1+f(x_a)) \tag{14}$$

$$\beta_a=\hat{t}_a-t_a=b_a(1+f(x_a)) \tag{15}$$

其中：b_a 是式（14）中自由流时间的附加惩罚。换言之，b_a 是在 $x_a=0$ 时的 beta 值。注意，前面已经证明，行程时间中的附加惩罚项与各自容量限制的拉格朗日值相同，见式(11)中的 β_a。因此，在 CTAP 的行程时间利用增强的行程时间进行更换，即 $t_a\leftarrow\hat{t}_a$，同时容量限制也下降了。如果已经知道 beta($beta(\beta_a)$) 的全局最优值(CTAP 中)，只需要基于任何已知的算法或软件，利用膨胀的行程时间解决 TAP 问题即可。

2　基于启发式的定价补偿策略

2.1　启发式 beta 值更新算法

式（14）~(15）的主要功能是解除过饱和道路的延时功能，直到交通量稳定在容量水平内。延迟函数中的初始 beta 值($beta(\beta_a)$)是迭代更新的，主要挑战是收敛性和用户平衡性。容量限制和交通分配之间存在很强的相关性，拥挤收费的一般理论是以边际成本为基础定价策略。则行程时间可表示为

$$\hat{t}_a(x_a)=t_a(x_a)+x_a\cdot\partial t_a(x_a)/\partial x_a \tag{16}$$

其中：$\hat{t}_a(x_a)$ 是那些已经穿越公路的额外的上下班人员的边际成本或旅行时间。$\partial t_a(x_a)/\partial x_a$ 是道路 x_a 上的每个司机所经历的额外旅行时间。通过边际成本在网络上实现系统最优流量，并拓展未充分利用的公路。因此，利用 $x_a\cdot\partial t_a(x_a)/\partial x_a$ 作为一个模板来更新初始测试如下：

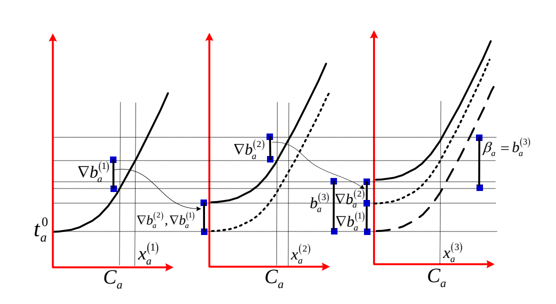
$$\hat{t}_{aC}^{(i)}=(t_a^0+b_a^{(i)})(1+f(C_a)) \tag{17}$$

$$\nabla b_a^{(i)} = \left(x_a^{(i)} - C_a\right)\frac{\hat{t}_a^{(i)} - \hat{t}_{aC}^{(i)}}{C_a} \tag{18}$$

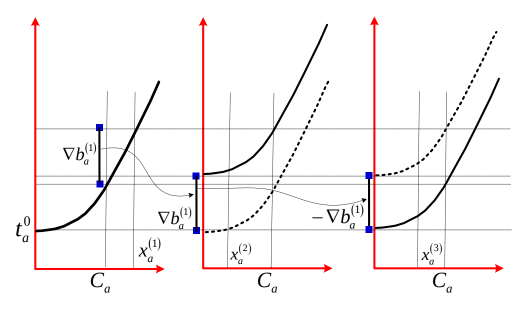
$$b_a^{(i+1)} = b_a^{(i)} + \nabla b_a^{(i)} \tag{19}$$

其中:上标 i 和 a 表示当前迭代和各自（过）饱和的道路；$\hat{t}_{aC}^{(i)}$ 表示膨胀延迟函数在容量为 $x_a = C_a$ 时的旅行时间；$b_a^{(i)}$ 是免费行程时间附加惩罚。$\nabla b_a^{(i)}$ 是在当前迭代中初始 beta 的计算速度。

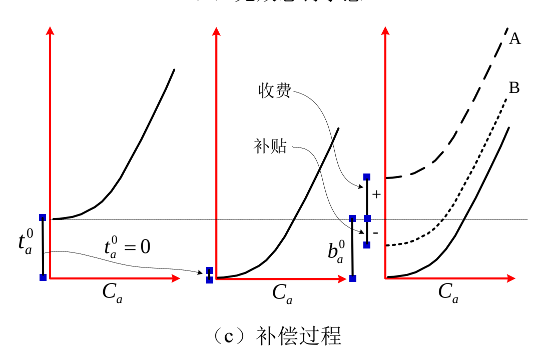
式（18）中，满足边际成本原则，即利用 $x_a \cdot \partial t_a(x_a)/\partial x_a$ 更新速度值。x 可由额外的交通流量 $\left(x_a^{(i)} - C_a\right)$ 进行替换，延迟函数斜率 (dt/dx) 可由膨胀的旅行时间的斜率减去容量值归一化步长值获得，即 $\left(\hat{t}_a^{(i)} - \hat{t}_{aC}^{(i)}\right)/C_a$。图 1(a)中，给出式（17）~(19）膨胀延迟函数的三次迭代图形化表示形式。在第一次迭代时，没有初始 beta 值 $initial-beta(b_a)$，即 $b_a^{(1)} = 0$，容量控制在 $x_a^{(1)} > C_a$，速度值 $\nabla b_a^{(1)} > 0$ 是计算机图形显示，其提升下一次迭代的延迟函数，即 $b_a^{(2)} = 0 + \nabla b_a^{(1)}$。在第二次迭代中，即使它是膨胀旅行时间 $\nabla b_a^{(1)}$，交通量仍高于通行能力，即 $x_a^{(2)} > C_a$。因此，速度值 $b_a^{(2)} > 0$ 用来计算第三次迭代值：$b_a^{(3)} = b_a^{(2)} + \nabla b_a^{(2)}$。执行第三次迭代，容量保持不变，即 $x_a^{(3)} = C_a$。算法有三个关键组件：$beta(\beta_a)$，$initial-beta(b_a)$ 和速度 ∇b_a，如图 1 所示。



（a）膨胀延迟函数迭代过程



（b）无效惩罚示意



（c）补偿过程

图 1　所提道路延迟函数表示方法

在给出这种渐进的方法中，如果一个（以上）饱和路发现是不饱和的，在中间的迭代位置，其相应的惩罚是无效的。见图 1（b），即 $p_a^{(i+1)} = 0 \mid x_a^{(i)} < C_a$。上述 $initial-beta(b_a)$ 计算过程，可用两条规则加以总结：

$$b_a^{(i+1)} = \begin{cases} b_a^{(i)} + \nabla b_a^{(i)}, x_a^{(i)} \geq C_a \\ 0, x_a^{(i)} < C_a \end{cases} \tag{20}$$

上面设定符合在产能分配问题的 KKT 稳定点条件，据前所述，beta 项可解释为在过饱和的道路排队堆积造成等待时间，因此对于非饱和路段的 beta 值最终设定为 0。

2.2　定价补偿策略

现在可以把定价补贴包括在模型中。如前所述，一个负循环可能破坏整个定价过程。为了避免这种情况，确保道路的旅行时间始终保持为正常值。为此，首先取消所有收费/补助道路的免费通行时间，然后将初始 beta 初始化到相应的自由流旅行时间。实际上，没有任何变化，延迟函数保持不变：

$$\begin{cases} b_a^{(0)} = t_a^0 \\ t_a^0 = 0 \end{cases} \tag{21}$$

具体如图 1（c）所示，在迭代计算的最后一步，根据获得的 beta 值，获得在 A 或 B 上的延迟函数。beta 值减去自由流时间 $\beta_a - t_a^0$，可以产生正值（延迟函数 A）或负值（延迟函数 B），分别代表通行费或补贴。此外，补贴的绝对价值不能超过自由流通时间。换句话说，没有哪条路会出现负数的旅行时间；因此，不会出现负循环。

给定最后一次迭代（迭代 n）输出，收费/补贴值（$-t_a^0 \leq s_a \leq +\infty$）可计算如下：

$$s_a = \hat{t}_a^{(n)} - t_a^0\left(1 + f\left(\bar{C}_a\right)\right) \tag{22}$$

2.3　算法流程

图 2 给出收费/补贴的定价方案流程图。

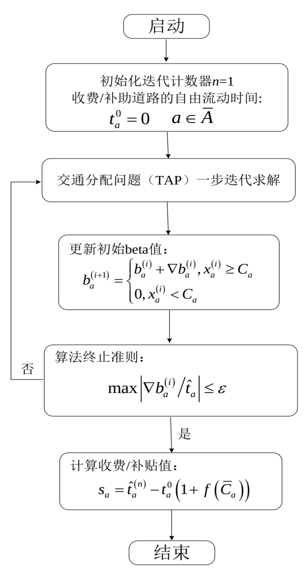


图 2　收费/补贴的定价方案流程图

如果旅行需求高于网络的容量，问题就变得不可行。可引

入一个通过道路高行程时间与所有区域相连的虚拟节点。该算法可以很容易地集成到一个传统的 TAP 解决方案中，如弗兰克-沃尔夫方法。鉴于 *initial-beta* 值的逐渐积累，收敛准则可定义为低于步数值的一个普通值的，具体形式为

$$\max_a \left|\nabla b_a^{(i)} / \hat{t}_a\right| \le \varepsilon \tag{23}$$

计算结果表明：$\varepsilon = 1\%$ 就足以获得可靠的结果。因此，该算法不终止，除非这两个标准的相对差距和相对速度值得到满足。迭代求解容量约束的拉格朗日乘子值的尝试，事实上相当于解决了原来 CTAP 部分的对偶变换。结果表明，部分对偶梯度问题导致交通量向量过大，次梯度法被认为是一个有效的求解算法。

2.4 收敛性讨论

上述算法本质上是一种次梯度方法，可基于交通量过大的情况，迭代地更新了对偶值。子梯度法的一个关键组成部分是步长，它被均匀地应用于所有道路，并且可能在迭代过程中变化。为了保证收敛，步长值必须符合一组规则。相反，本文提出了一个直观的步长选择机制（类似于边际成本），排斥每一条道路和迭代。上述方法的最优性条件和收敛性方面，本文方法的新颖之处是将拉格朗日值转换为通行费/补贴值。为此，当 CTAP 终止时，自由流时间先清零；利用最终的旅行时间和原始的旅行时间函数的区别，指定收费/补贴值。

根据式（18）和（20）可知，当 $x_a^{(i)} \ge C_a$ 时，$\nabla b_a^{(i)} = \left(x_a^{(i)} - C_a\right)\frac{\hat{t}_a^{(i)} - \hat{t}_{aC}^{(i)}}{C_a}$ 中的 $\left(x_a^{(i)} - C_a\right)$ 项为正值，$\frac{\hat{t}_a^{(i)} - \hat{t}_{aC}^{(i)}}{C_a}$ 项为负值，亦即 $\nabla b_a^{(i)}$ 取值为负值，满足梯度优化中的扶梯度条件。因此，算法收敛。

3 实验分析

3.1 实验设置

该方法利用 macro 进行编码，这是一种交通规划软件 Emme 3 的专用编程语言的，其中无容量限制 TAP 过程采用弗兰克－沃尔夫算法求解。使用一台具有 3.60 GHz 的 CPU 和 16 GB RAM 的台式 PC 机；其次，使用现实生活中的一个大型的道路网络例子对算法性能进校验证，该道路网络案例，来自上海市，如图 3 所示。

该案例由 154 个区、943 个节点和 3075 条定向道路组成，每小时的车辆通行需求量为 56219 辆。该城市是由两个河流一分为二，河流位置位于城市的中间。根据流量调查和实地观察，交通局在提出了理想的交通分配，以避免在上午高峰时段发生重大交通堵塞。图 4 中，1~11 标号为河流上的桥梁。

在本研究中，收费/补贴的局部和目标流量值是已知的，可由外部给定。为此在表 1 中，给出包括过境交通量在内的过境点的特征量取值，其中 t_a^0 为自由流旅行时间，$\bar{C}_a$ 道路的物理容量，C_a 交通量上限。

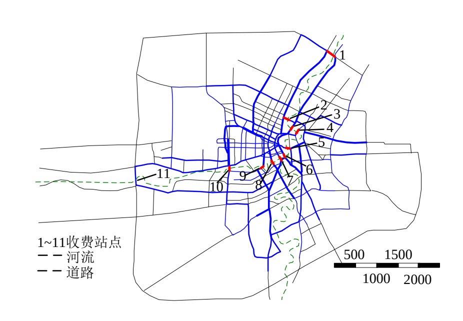


图 3　道路网络案例

表 1　输入和输出值设定

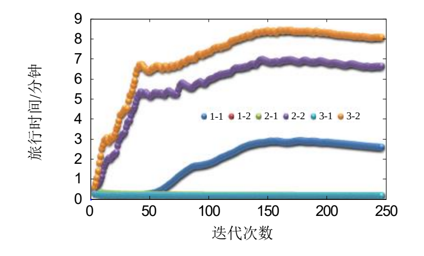
道路 ID	方向 ID	t_a^0	$\bar{C}_a$	C_a	交通流量	x_a	x_a/C_a	$\hat{t}_a$	s_a	通行费/补贴
1	1-1	0.77	2500	1800	828.93	1796.92	99.83	2.66	1.86	0.52
	1-2	0.77	2500	1800	183.76	185	10.28	0.03	-0.74	-0.21
2	2-1	0.84	750	750	722.32	727.05	96.94	0.03	-0.92	-0.26
	2-2	0.84	750	750	762.35	750.24	100.03	7.08	6.11	1.7
3	3-1	0.25	2500	1800	600.48	348.27	19.35	0.01	-0.24	-0.07
	3-2	0.25	2500	1800	2759.71	1801.39	100.08	8.63	8.37	2.33
4	4-1	0.35	2500	1800	1205.92	1800.78	100.04	7.2	6.84	1.9
	4-2	0.35	2500	1800	84.03	108.25	6.01	0.01	-0.33	-0.09
5	5-1	0.44	1750	1750	1641.31	1749.8	99.99	9.52	9.02	2.51
	5-2	0.44	1750	1750	469.82	403.75	23.07	0.02	-0.42	-0.12
6	6-1	0.23	2625	1800	2446.11	1802.87	100.16	12.18	11.95	3.32
	6-2	0.23	1750	1750	785.81	592.48	33.86	0.01	-0.22	-0.06
7	7-1	0.16	2500	1800	2313.34	1796.73	99.82	12.85	12.68	3.53
	7-2	0.16	2500	1800	656.64	389.2	21.62	0.01	-0.15	-0.04
8	8-1	0.23	1750	1750	2035.5	1751.26	100.07	11.73	11.47	3.19
	8-2	0.23	2625	1800	783	752.7	41.82	0.01	-0.22	-0.06
9	9-1	0.57	2625	1800	1683.56	1795.59	99.76	12.75	12.16	3.38
	9-2	0.47	2625	1800	903.52	824.2	45.79	0.02	-0.45	-0.12
10	10-1	0.30	2550	1800	1547.86	1092.88	60.72	0.01	-0.29	-0.08
	10-2	0.27	3750	1800	3261.11	1802.74	100.15	15.13	14.86	4.13
11	11-1	0.59	2500	1800	189.06	629.38	34.97	0.02	-0.57	-0.16
	11-2	0.59	2500	1800	289.45	1505.82	83.66	0.02	-0.58	-0.16

3.2　结果分析

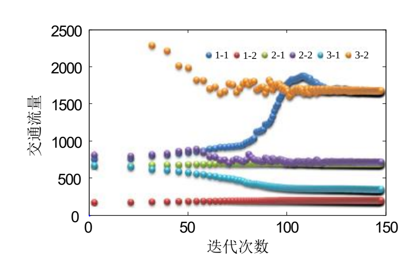
该算法迭代运行 237 次，直到相对间隙和相对步长值分别下降到 0.0001 和 0.01 以下。计算时间仅为 15 秒。计算结果包括交通量、膨胀旅行时间以及通行费/补贴值也如表 2 所示。为满足交通量的限制，如 x_a/C_a 列所示的轻微违规行为小于 1%，这可以归因于 ITT 是一种启发式算法，存在一定的越限情况。图 5 显示了关于道路 1, 2 和 3 的连续迭代的交通量和膨胀旅行时间的变化。

图 5 所示结果显示，结果表明，这种变化在早期迭代中是不稳定的，其会导致交通量变化和旅行时间变化不恒定，但随着迭代过程会逐步收敛，并最终稳定下来。这表明，算法对于示例道路网络的控制起到了预期效果。

如果设定旅游需求预计达到 5%，则意味着可达到 59029.94 人次。5%的增长可以被视为一年或两年一次的城市交通增长，这样就可以获得一些在收费、补贴金额的年变化上的启示。下面给出预计需求的比较结果，具体如表 2 实验数据所示。



（a）交通量变化



（b）旅行时间变化

图 5　前三个桥连续迭代计算结果

表 2　预计需求的比较结果

道路 ID	方向 ID	交通量容量	现有道路网络与需求：现有交通量容量	通行费-补贴	交通量容量占比/%	收费/补贴/元	现有的道路网络及需求预测：现有交通量容量	通行费-补贴	交通量容量占比/%	收费/补贴/元
1	1-1	1800	828.93	1796.92	99.83	0.52	884.15	1897.14	105.4	1.65
	1-2	1800	183.76	185	10.28	-0.21	171.15	198.69	11.04	-0.2
2	2-1	750	722.32	727.05	96.94	-0.26	693.08	753.73	100.5	-0.22
	2-2	750	762.35	750.24	100.03	1.7	738.28	785.66	104.75	3.09
3	3-1	1800	600.48	348.27	19.35	-0.07	712.76	362.41	20.13	-0.06
	3-2	1800	2759.71	1801.39	100.08	2.33	2894.1	1872.34	104.02	3.55
4	4-1	1800	1205.92	1800.78	100.04	1.9	1344.33	1870.29	103.91	3.08
	4-2	1800	84.03	108.25	6.01	-0.09	52.04	115.48	6.42	-0.09
5	5-1	1750	1641.31	1749.8	99.99	2.51	1583.63	1817.77	103.87	3.95
	5-2	1750	469.82	403.75	23.07	-0.12	407.18	421.54	24.09	-0.11
6	6-1	1800	2446.11	1802.87	100.16	3.32	2656.02	1832.61	101.81	4.47
	6-2	1750	785.81	592.48	33.86	-0.06	937.85	586.84	33.53	-0.06
7	7-1	1800	2313.34	1796.73	99.82	3.53	2449.24	1849.18	102.73	4.69
	7-2	1800	656.64	389.2	21.62	-0.04	636.55	408.02	22.67	-0.04
8	8-1	1750	2035.5	1751.26	100.07	3.19	2104.15	1784.64	101.98	4.71
	8-2	1800	783	752.7	41.82	-0.06	826.34	773.17	42.95	-0.06
9	9-1	1800	1683.56	1795.59	99.76	3.38	1610.9	1841.02	102.28	4.5
	9-2	1800	903.52	824.2	45.79	-0.12	754.71	888.55	49.36	-0.12
10	10-1	1800	1547.86	1092.88	60.72	-0.08	1678.71	1110.07	61.67	-0.08
	10-2	1800	3261.11	1802.74	100.15	4.13	3444.08	1876.04	104.22	5.02
11	11-1	1800	189.06	629.38	34.97	-0.16	228.85	728	40.44	-0.15
	11-2	1800	289.45	1505.82	83.66	-0.16	306.38	1835.87	101.99	-0.16
	Sum		26153.6	24407.3			27114.5	25609.1		
	Min					-0.26				-0.22
	Max					4.13				5.02

如表 2 所示，通过收费/补贴公路的总交通流量从 24407.3 增加到 25609.1，相当于 4.9%的增长。补贴和通行费的数额也出现了适度的变化，这是对最终结果稳定的一种支持。

选取图 3 中，桥梁 1、5、10、11 四个路段进行 beta 值收敛性验证，其中，路段 5 位于市中心，其交通处于饱和状态，桥梁 1、10、11 路段处于郊区，交通处于非饱和状态，beta 值收敛实验结果见图 6 所示。

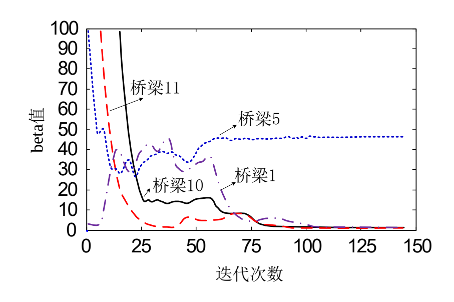


图 6 beta 值收敛性验证

根据图 6 可知，选取的桥梁 1、5、10、11 四个路段均随着迭代过程收敛，且桥梁 1、10、11 三个路段的 beta 值收敛到 0 值附近，而桥梁 5 的 beta 值收敛到非 0 值。这与前面表述相一致。

4 结束语

本文提出一种基于延迟函数的次梯度启发式道路交通补偿策略，是基于 Beckmann 最小化目标函数实现，然后利用库恩-希尔斯条件和拉格朗日乘子建立模型的条件约束，并基于启发式算法建立道路交通的定价补偿策略，利用边际成本建立延迟函数分析模型，然后基于次梯度法进行模型的优化。实验结果表明，所提算法可有效实现对交通量和旅行时间的优化，通过收费/补贴公路的总交通流量从 24407.3 增加到 25609.1，增长 4.9%，提高了通行率，并且对 beta 值的收敛性进行了理论和实验分析。下一步，主要是对算法的实际应用进行研究。

参考文献:

[1] 杨帆，杨琦，张珺，等. 公共交通定价与最优政府补偿模型 [J]. 交通运输工程学报, 2010, 10 (2): 110-115.

[2] Castro L, Stanojevic R, Gorinsky S. Using Tuangou to Reduce IP Transit Costs [J]. IEEE//ACM Trans on Networking, 2014, 22 (5): 1415-1428.

[3] Andreas R, Magnus F, Konrad Z, et al. Freight transportation planning considering carbon emissions and in-transit holding costs: a capacitated multi-commodity network flow model [J]. EURO Journal on Transportation and Logistics, 2016, 5 (2): 123-160.

[4] Michael G, Ahmed E G. Driving transit retention to renaissance: trends in Montreal commute public transport mode share and factors by age group and birth cohort [J]. Public Transport, 2013, 5 (3): 219-241.

[5] Michael G, Ahmed E G. Transit to eternal youth: lifecycle and generational trends in Greater Montreal public transport mode share [J]. Transportation, 2014, 41 (1): 1-19.

[6] Mahyar A, Rezaeestakhruie H, Poorzahedy H. Multi-objective cordon price design to control long run adverse traffic effects in large urban areas [J]. NETNOMICS: Economic Research and Electronic Networking, 2015, 16 (1): 1-12.

[7] Alessandro V, Giuseppe G, Daniele R. A smartphone based DSS platform for assessing transit service attributes [J]. Public Transport, 2016, 8 (2): 315-340.

[8] Bagherian M, Mesbah M, Ferreira L. Using delay functions to evaluate transit priority at signals [J]. Public Transport, 2015, 7 (1): 61-75.

[9] Qin Feifei, Zhang Xiaoning, Eoin P. The welfare effects of nationalization in a mixed duopoly public transport market [J]. Operational Research, 2017, 17 (2): 593-618.

[10] Eric J G. Coordinated pricing for cars and transit in cities with hypercongestion [J]. Economics of Transportation, 2015, 4 (1): 64-81.

[11] Leonardo J B, Sergio R J. Integrating congestion pricing, transit subsidies and mode choice [J]. Transportation Research Part A: Policy and Practice, 2012, 46 (6): 890-900.

[12] Zhao Xueyu, Yang Jiaqi. Research on the bi-level programming model for ticket fare pricing of urban rail transit based on particle swarm optimization algorithm [J]. Procedia: Social and Behavioral Sciences, 2013, 96 (6): 633-642.

[13] Kaushik D, Massimo F. Estimating welfare changes from efficient pricing in public bus transit in India [J]. Transport Policy, 2011, 18 (1): 23-31.

[14] Bagloee S A, Heshmati M, Tavana M, et al. A logit-based model for measuring the effects of transportation infrastructure on land value [J]. Transp Plan Tech, 2017, 40 (2): 143–166.

[15] Xiao F, Zhang H. Pareto-improving toll and subsidy scheme on transportation networks [J]. European Journal of Transport and Infrastructure Research, 2014, 14 (1): 46–65.